数理解析研究所講究録
225巻 1975年 1-15

Reduced b-function

佐藤幹夫 述
矢野環 記.

これは、Reduced b-函数についての、佐藤先生の講演、個人的談話、unofficial prints 等から組み立てたものである。その他色々補足がある。

この方面はあまり開拓されていないが、本来、b そのものよりも、理論的にはあつかいやすいはずのものと思われる。

§1. 定義. 基本性質 — $\bar{b}$, $\bar{b}'$, c_∞ —

$b(s)$ は, $P(s)f^{s+1}=b(s)f^s$ となる, monic, degree最小なものであった。これにならい, monic な $\mathbb{C}[s]$ の元達 $b_1(=b), b_2, \cdots, b_\nu, \cdots,$ を次の様に定義する.

Def. 1 $$(b_\nu(s)) \equiv [\mathcal{D}[s]f^{s+\nu} : f^s]_{\mathbb{C}[s]}$$

f の巾乗 f^ν の b 函数を $b_{f^\nu}(s)$ とすれば,

Cor. 2 $$(b_{f^\nu}(s)) = (b_\nu(\nu s))$$

Thm. 3 $\exists!\ \bar{b}(s),\ \bar{b}'(s),\ c_\nu(s),\ c_\infty(s),\ c'_\nu(s)$

$\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\begin{aligned} b_\nu(s) &= [\bar{b}(s)]_\nu\, c_\nu(s+\nu) \\ &= c'_\nu(s)\,[\bar{b}'(s)]_\nu \end{aligned}$$

$\nu \le \nu' \Rightarrow c_\nu(s) \mid c_{\nu'}(s)$; $\quad \nu \ge \nu_0 \Rightarrow \begin{cases} c_\nu(s) = c_\infty(s) \\ c'_\nu(s) = c_\infty(s) \end{cases}$

(c' についても同様).

ここに, $[\varphi(s)]_\nu = \varphi(s)\varphi(s+1)\cdots\varphi(s+\nu-1)$

Def. 4 $\bar{b}(s)$ を f の right reduced b-fn
$\bar{b}'(s)$ を 〃 left 〃 と呼ぶ.

Cor. 5 $\nu \ge \nu_0$, $$\bar{b}(s) = \frac{b_{\nu+1}(s)}{b_\nu(s+1)}$$

$$\bar{b}'(s) = \frac{b_{\nu+1}(s-\nu)}{b_\nu(s-\nu)}$$

$\bar{b}(s)$ は, f^s の analytic continuation に最適であり, 通常 reduced b とは, $\bar{b}(s)$ のことをいう. ($b_{red}(s)$ ともかく.) よって, 今後も議論は $\bar{b}(s)$ を主体にのべる. しかし立場によっては $\bar{b}'(s)$ も有効である. 又, mixed b-fn も定義しうる.

$\bar{b}(s) = \prod (s+\alpha_j)$ $\quad \gamma(s) = \prod \Gamma(s+\alpha_j)$ とすれば,

$P_\nu(s) f^{s+\nu} = b_\nu(s) f^s$ より,

$$\frac{1}{C_\infty(s+\nu)} P_\nu(s)\left(\frac{1}{\gamma(s+\nu)} f^{s+\nu}\right) = \frac{1}{\gamma(s)} f^s$$

よって, $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ から, $\frac{1}{\gamma(s)} f^s$ を $s \in \mathbb{C}$ へ接続しうる.
$\bar{b}'(s)$ では, $C_\infty(s)$ の零点がわざわいする.

example. $\quad f = x^4 + y^4$

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+\tfrac{2}{4})(s+\tfrac{3}{4})(s+\tfrac{4}{4})(s+\tfrac{5}{4})(s+\tfrac{6}{4})$$
$$\bar{b}(s) = (s+1)\cdot(s+\tfrac{2}{4}) \cdots\cdots (s+\tfrac{5}{4})$$
$$\bar{b}'(s) = (s+1)\cdot \quad (s+\tfrac{3}{4}) \cdots\cdots (s+\tfrac{6}{4})$$
$$C_\infty(s) = C_1(s) = s+\tfrac{2}{4} =$$

一般の quasi-hom. isolated の場合については p. をみよ.

〈定理の証明〉

lemma
$$b_{\nu+\nu'}(s) \mid b_\nu(s) b_{\nu'}(s+\nu) \qquad ①$$
$$b_\nu(s) \mid b_{\nu+\nu'}(s) \qquad ②$$
$$b_{\nu'}(s+\nu) \mid b_{\nu+\nu'}(s) \qquad ③$$

∵)
$$b_{\nu'}(s+\nu) b_\nu(s) f^s \in \mathcal{D}[s]\, b_{\nu'}(s+\nu) f^{s+\nu} \subset \mathcal{D}[s] f^{s+\nu+\nu'}$$
$$b_{\nu+\nu'}(s) f^s \in \mathcal{D}[s] f^{s+\nu+\nu'} \subset \mathcal{D}[s] f^{s+\nu}$$
$$b_{\nu+\nu'}(s) f^{s+\nu} \in f^\nu \mathcal{D}[s] f^{s+(\nu+\nu')} \subset \mathcal{D}[s] f^{(s+\nu)+\nu'}$$

$b(-s)=0$ の根を，mod $\mathbb{Z}$ で分類し，$\{\alpha_1\},\cdots,\{\alpha_l\}$ とする．

$\{\alpha_j\} \equiv \{\alpha_j, \alpha_j+i_j^{(1)}, \cdots, \alpha_j+i_j^{(n_j-1)}\}$　　$\alpha_i \not\equiv \alpha_j \mod \mathbb{Z}$

$i_j^{(k)} < i_j^{(k+1)}$ とする．$1+i_j^{(n_j-1)} = l(\alpha_j)$ と記す．

① によれば，$b_\nu(s)$ の任意の factor $s+\beta$ に関し，$\exists j$，$\beta \equiv \alpha_j \mod \mathbb{Z}$．$\beta \geq \alpha_j$．又，整除関係は各 group $\{\alpha_j\}$ ごとに，対応する factors で成立することを想起し，その factors のみをみて，$s+\alpha_j \mapsto s+1$ とすれば，結局

$$b_\nu(s) = \prod_{i=1}^{r+\nu-1} (s+i)^{\mu_{\nu,i}}$$ としてよい．

$$\left(b(s) = (s+1)^{\mu_{1,1}} \cdots (s+r)^{\mu_{1,r}} \quad \nu_{0,0} \neq 0 \quad \nu_{0,r} \neq 0 \right)$$

このようにすれば，①②③ は次の様になる．

$$\mu_{\nu+\nu',i} \leq \mu_{\nu,i} + \mu_{\nu',i-\nu}$$
$$\mu_{\nu,i} \leq \mu_{\nu+\nu',i}$$
$$\mu_{\nu',i-\nu} \leq \mu_{\nu+\nu',i}$$

又，$\mu_{\nu,i} = 0 \quad i \geq \nu+r$，$(\mu_{\nu,i} = 0 \quad \nu \leq 0 \text{ or } i \leq 0)$

<u>Claim</u>　i) $\nu \geq \varepsilon$, $1 \leq i \leq r-1$ のとき，$\mu_{\nu,i} = \mu_i$ (cte)

ii) $i \geq r$, $1 \leq \rho \leq r-1$．　$\mu_{\nu,\nu+\rho} = \mu'_\rho$ (cte)

iii) $\nu \geq i \geq r$ のとき，　$\mu_{\nu,i} = \mu$ (cte)

iv) $\mu_1 \leq \mu_2 \cdots \leq \mu_{r-1} \leq \mu \geq \mu'_1 \geq \cdots \geq \mu'_{r-1}$

v) $\mu_k + \mu'_k \geq \mu$

$\because$) <u>$j \geq i$</u>　$\mu_{j,i} \leq \mu_{i,i} + \mu_{j-i,0} = \mu_{i,i}$

$\mu_{i,i} \leq \mu_{j,i}$　　　$\therefore \mu_{j,i} = \mu_{i,i}$

特に $i=1,\cdots,r-1$ のとき $\mu_i \equiv \mu_{i,i}$ とおくと，

$i \leq j \Rightarrow \mu_{i,i} \leq \mu_{j,j}$ より，　$\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{r-1}$

<u>$i \geq r$</u> $\quad \mu_{j,i} \leq \mu_{i-r,i} + \mu_{j-i+r,r} = \mu_{j-i+r,r}$

$\mu_{j-(i-r),r} \leq \mu_{j,i} \qquad \therefore \ \mu_{j,i} = \mu_{j-i+r,r}$

$j<k$ のとき，$\rho = i-j$ として，$\underline{\mu'_\rho} = \mu_{r-\rho,r} \ (= \mu_{j,\rho+j})$

とおくと，$\rho \leq \rho' \Rightarrow \mu'_\rho = \mu_{r-\rho,r} \geq \mu_{r-\rho',r} = \mu'_{\rho'}$

$\therefore \ \mu'_1 \geq \cdots \geq \mu'_{r-1}$.

<u>$j \geq i \geq r$</u> このとき，上の2つが同時に成立して

$\mu_{i,i} = \mu_{j,i} = \mu_{(j-i)+r,r}$. これが $\forall j \geq \forall i \geq r$

について成立するので結局 $\mu_{j,i} = \mu_{r,r} \equiv \mu$.

そして，$\mu_{r-1} = \mu_{r-1,r-1} \leq \mu_{r,r} \geq \mu_{r-1,r} = \mu'_1$

又，$\mu_k + \mu'_k = \mu_{k,k} + \mu_{r-k,r} \geq \mu_{r,r} = \mu$.

$$\begin{cases} \beta_1 = \mu_1 \\ \beta_2 = \mu_2 - \mu_1 \\ \vdots \\ \beta_{r-1} = \mu_{r-1} - \mu_{r-2} \\ \beta_r = \mu - \mu_{r-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta'_1 = \mu - \mu'_1 \\ \beta'_2 = \mu'_1 - \mu'_2 \\ \vdots \\ \beta'_r = \mu'_{r-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \mu_1 + \mu'_1 - \mu \\ \vdots \\ \gamma_{r-1} = \mu_{r-1} + \mu'_{r-1} - \mu \end{cases}$$

ととって，$\bar{b}(s) \equiv (s+1)^{\beta_1} \cdots (s+r)^{\beta_r}$ $\quad (c_\infty(s) = (s+1)^{\gamma_1} \cdots (s+r-1)^{\gamma_{r-1}}$

$\bar{b}'(s) \equiv (s+1)^{\beta'_1} \cdots (s+r)^{\beta'_r}$

とおけば，まず b_ν の分解をすまえる.

$c_\nu(s)$ の定義と $c_\nu | c_\infty$ はもはや明らかであろう.

一般には，各 $\{\alpha_j\}$ で行なって，乗ずればよい.

quod erat demonstrandum.

証明方法の，又 $\bar{b}$, c 構成の

Cor. 6 $\nu_0 \leq \max_j l(\alpha_j)$ ととれる.

$\bar{b}(s) c_\infty(s+1) = c_\infty(s) \bar{b}'(s)$

$c_\infty(s) \,|\, [\bar{b}(s)]_{\nu_0}, \ [\bar{b}'(s-\nu_0)]_{\nu_0}$

この第二式 $\dfrac{\bar{b}'(s)}{\bar{b}(s)} = \dfrac{C_\infty(s+1)}{C_\infty(s)}$ を用いれば，2つの Prop を得る。

$$\frac{C_\nu(s+\nu)}{C'_\nu(s)} = \left[\frac{\bar{b}'(s)}{\bar{b}(s)}\right]_\nu = \frac{C_\infty(s+\nu)}{C_\infty(s)}$$

(これもどうしても必要というのではないが)

従って，

Prop. 7 If $C_\nu(s) = C'_\nu(s)$, then
$$C_\nu(s) = C'_\nu(s) = C_\infty(s).$$

Prop. 8 $C_\infty(s)$ が cte の時，その時に限って $\bar{b}'(s) = \bar{b}(s)$

従って，$b(s) = \bar{b}(s)$ の時以外では，right reduced b と，left reduced b は異なる。だが，根の，mod Z でみた各 group の元数は，つねに等しい。

§.2 $\bar{b}$ の min. poly. としての実現 — $\mathfrak{M}(s)$ —

$b(s)$ は $\mathfrak{M} = \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1}$ における s の最小多項式であった。$\bar{b}(s)$ も，同様にとらえることを説明し，reduced b の一般化についてもふれる。

記法を少し変更する。

$P_\nu(s)$ $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ を

$$P_\nu(s)f^s = C_\infty(s)\,\bar{b}(s-1)\cdots\bar{b}(s-\nu)f^{s-\nu}$$

となるものとせよ。$P_\nu(s)$ は mod $g[s]$ で unique.

$P_0(s)\ (= C_\infty(s))$, $P_1(s)$, $\cdots$ で generate される $\mathcal{D}[s]/g[s]$ の submodule を $C_\infty(s)\mathcal{D}[s]/g[s]$ とする。

$$\mathcal{J}[s] \subset C_\infty(s)\,\mathcal{K}[s] \subset \mathcal{D}[s] \subset \mathcal{K}[s] \subset \frac{1}{C_\infty(s)}\mathcal{D}[s].$$

$P_m[s] \in \mathcal{D}[s]P_0[s] + \cdots + \mathcal{D}[s]P_{m-1}[s]$ となる m をとる.

i.e. $P_m[s] + A_1[s]P_{m-1}[s] + \cdots + A_m[s]P_0[s] = 0 \mod \mathcal{J}[s]$

$$P_{m'}[s]\,P_n[s+n] = C_\infty(s)\,P_{m'+n}[s+n] \mod \mathcal{J}[s+n]$$

に注意し, $P_n[s+n]$ を右から乗じて $C(s)$ で除せば, $(s \mapsto s-n)$

$$P_{m+n}[s] + A_1[s-n]P_{m+n-1}[s] + \cdots + A_m[s-n]P_n[s] = 0 \mod \mathcal{J}[s].$$

$$\therefore\ \mathcal{K}[s] = \frac{1}{C_\infty(s)}\left(\mathcal{D}[s]P_0[s] + \cdots + \mathcal{D}[s]P_{m-1}[s]\right)$$

従って, $\mathcal{M}(s) = \mathcal{K}[s]/\mathcal{J}[s]$ とおくと,

$$= \mathcal{D}[s]f^s + \bar{b}(s-1)\mathcal{D}[s]f^{s-1} + \cdots + [\bar{b}(s-m+1)]_{m-1}\mathcal{D}[s]f^{s-m+1}.$$

$\overline{\mathcal{M}}_\nu(s) \equiv \mathcal{M}(s)/\mathcal{M}(s+\nu)$ とおく.

Thm. 9 $[\bar{b}(s)]_\nu$ は, $\overline{\mathcal{M}}_\nu(s)$ における endomorphism s の minimal polynomial である.

∵) $[\bar{b}(s)]_\nu\mathcal{M}(s) \supset \mathcal{M}(s+\nu)$ は明らか. $\overline{\mathcal{M}}_\nu(s)$ における s の minimal poly. を $\bar{\bar{b}}_\nu(s)$ とし, $\bar{b}_1(s)$ は k 次であるとする.

if $\exists\,\bar{\bar{b}}_{\nu_0}(s) \neq [\bar{b}(s)]_{\nu_0}$, g.c.d をとって,

$\deg \bar{\bar{b}}_{\nu_0} < \deg[\bar{b}]_{\nu_0}$ にできる. $\therefore\ \exists k' < k$ s.t.

$\deg \bar{\bar{b}}_\nu < \nu k'$ $(\nu \gg 0)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{M}(s+\nu+m-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+\nu} \arrow[r] \arrow[loop above, "{[\bar{b}(s)]_\nu c_\nu(s+\nu)}"] & 0 \\
\bar{\bar{b}}_{\nu+m-1}(s) \arrow[r, bend right] & \mathcal{M}(s)/\mathcal{M}(s+\nu+m-1) & &
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ \nu k \leq (\nu+m-1)k'$

これは $k' < k$ に矛盾

さらに，$\mathfrak{M}(s)$はこの性質をもつ最小のものである。
これを説明するため，いくつか一般的事項を準備しよう．

$\mathfrak{N}(s)$ とは，$\mathcal{D}[s]$ module であって，

$$\exists m_0, \quad \mathcal{D}[s]f^{s-m_0} \supset \mathfrak{N}(s) \supset \mathcal{D}[s]f^s$$

$$\mathfrak{N}(s) \supset \mathfrak{N}(s+1)$$

をみたすものとする。

$b_{\mathfrak{N},\nu}(s)$ を $\mathfrak{N}(s)/\mathfrak{N}(s+\nu) \circlearrowleft s$ の min. poly とする．
(存在は上の条件から保証される．) $b_{\mathfrak{N},1}$ を $b_{\mathfrak{N}}$ と記す．

$$\mathfrak{N}(s) \supset \mathfrak{N}(s+\nu) \supset \mathfrak{N}(s+\nu+\nu') \qquad \text{より}$$

$$\begin{cases} b_{\mathfrak{N},\nu+\nu'}(s) \mid b_{\mathfrak{N},\nu}(s)\, b_{\mathfrak{N},\nu'}(s+\nu) \\ b_{\mathfrak{N},\nu}(s) \mid b_{\mathfrak{N},\nu+\nu'}(s), \quad b_{\mathfrak{N},\nu'}(s+\nu) \mid b_{\mathfrak{N},\nu+\nu'}(s) \end{cases}$$

従って，定理 3 の証明はそのまま通用して次が成立する。

Thm 10. $\exists\, \bar{b}_{\mathfrak{N}},\ \bar{b}'_{\mathfrak{N}},\ c_{\mathfrak{N},\nu},\ c'_{\mathfrak{N},\nu},\ c_{\mathfrak{N}}$

$$b_{\mathfrak{N},\nu}(s) = [\bar{b}_{\mathfrak{N}}(s)]_\nu\, c_{\mathfrak{N},\nu}(s+\nu)$$
$$= c'_{\mathfrak{N}}(s)\,[\bar{b}'_{\mathfrak{N}}(s)]$$

・ $\nu \le \nu'$ $\quad c_{\mathfrak{N},\nu} \mid c_{\mathfrak{N},\nu'}$; $c'_{\mathfrak{N},\nu} \mid c'_{\mathfrak{N},\nu'}$; $\exists \nu_0 \le \nu$, $c_{\mathfrak{N},\nu} = c'_{\mathfrak{N},\nu} = c_{\mathfrak{N}}$.

$$\bar{b}_{\mathfrak{N}}(s)\, c_{\mathfrak{N}}(s+1) = c_{\mathfrak{N}}(s)\, \bar{b}'_{\mathfrak{N}}(s)$$

$\bar{b}'_{\mathfrak{N}}$ は $\bar{b}_{\mathfrak{N}}$ と $c_{\mathfrak{N}}$ から定まる故，pair$(\bar{b}_{\mathfrak{N}}, c_{\mathfrak{N}})$
により，$\mathfrak{N}$ の特徴づけを考える．

$\mathcal{N}(s) \rightsquigarrow (\bar{b}_{\mathcal{N}}, \bar{c}_{\mathcal{N}})$ とかくとき、

$\mathcal{D}[s]f^s \rightsquigarrow (\bar{b}, c)$, $\mathcal{M}(s) \rightsquigarrow (\bar{b}, 1)$

$A \supset B$ で、A/B における s の min. poly が $a(s)$ であることを、右のように表示する

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend right, "a(s)"'] & B \end{tikzcd}$$

$m \geq m_0$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}[s]f^{s-m_0} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[rr, bend left, "b_{m_0}(s-m_0)"] & \mathcal{N}(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend right, "g(s)"'] & \mathcal{D}[s]f^s \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend left, "h(s)"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] \arrow[dr, bend right, "b_{m-m_0}(s)"'] & \mathcal{N}(s+m_0) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend left, "b_{\mathcal{N},m-m_0}(s+m_0)"] & \mathcal{N}(s+m) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend right, "g(s+m)"'] & \mathcal{D}[s]f^{s+m} \\
& & & \mathcal{D}[s+m-m_0]f^{s+m-m_0} \arrow[ur, phantom, "\supset"] \arrow[ur, bend right, "h(s+m-m_0)"'] & &
\end{tikzcd}$$

上の図式より、

1. $b_{m-m_0}(s) \mid b_{\mathcal{N},m}(s)$; $b_{\mathcal{N},m-m_0}(s+m_0) \mid b_m(s)$
2. $h(s) \mid b_{m_0}(s)$, $b_{\mathcal{N},m_0}(s)$

   $g(s) \mid b_{m_0}(s-m_0)$, $b_{\mathcal{N},m_0}(s)$
3. $b_m(s) \mid h(s)\, b_{\mathcal{N},m-m_0}(s+m_0)\, g(s+m)$

   $b_{\mathcal{N},m}(s) \mid g(s)\, b_{m-m_0}(s)\, h(s+m-m_0)$

$\deg \bar{b} = d$, $\deg \bar{b}_{\mathcal{N}} = d'$ とおく.

十分大なる m に対して、1 の 2 つの式は

$$(m-m_0)d + \deg c \leq md' + \deg c_{\mathcal{N}}$$

$$(m-m_0)d + \deg c_{\mathcal{N}} \leq md + \deg c$$

$m \to \infty$ として、$d = d'$. 再び上の式より、

$$|\deg c_{\mathcal{N}} - \deg c| \leq m_0 d.$$

2. より　$\deg g, \deg h \le mod + \min(\deg c_{m_0}, \deg c_{\pi, m_0})$

3 より　$m+$十分大で ~~$m\to\infty$~~　$mod + |\deg c_\pi - \deg c| \le \deg g + \deg h$.

$\bar{b}_\pi$ と $\bar{b}$ は，次数が等しいのみならず，根の間にも著しい関係がある．mod. $\mathbb{Z}$ groups の数の一致，各 group の元の個数の一致は容易である．さらに調べるには，ある一つの mod. $\mathbb{Z}$ group に着目して，次の様にしてよい．

$$\bar{b}(s) = (s+n_1)\cdots(s+n_d) \qquad n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_d. \ (\text{整数})$$

$$\bar{b}_\pi(s) = (s+n_1')\cdots(s+n_d') \qquad n_1' \le n_2' \le \cdots \le n_d' \ (〃)$$

1の第一式より

$$[(s+n_1)\cdots(s+n_d)]_{m-m_0}\, c(s+m-m_0) \mid [(s+n_1')\cdots(s+n_d')]_m\, c_\pi(s+m)$$

両辺の，絶対値最小根の因子を比較すれば，$n_1 \ge n_1'$.

一方，第二式より

$$[(s+m_0+n_1')\cdots(s+m_0+n_d')]_{m-m_0}\, c_\pi(s+m) \mid [(s+n_1)\cdots(s+n_d)]_m\, c(s+m)$$

$\therefore$　$m_0 + n_1' \ge n_1$.　まとめて　$n_1 \ge n_1' \ge n_1 - m_0$.

従って，$[s+n_1]_{m-m_0} \mid [s+n_1']_m$.　$r_{1,m}(s) = [s+n_1']_m / [s+n_1]_{m-m_0}$

$$[(s+n_2)\cdots(s+n_d)]_{m-m_0}\, c(s+m-m_0) \mid r_{1,m}(s)[(s+n_2')\cdots(s+n_d')]_m\, c_\pi(s+m)$$

$n_1 \le n_2$ と，$r_{1,m}(s)$ の表わし方より，$s+n_2 \mid [(s+n_2')\cdots(s+n_d')]_m$.

i.e.　$n_2 \ge n_2'$　同様に　$n_2' + m_0 \ge n_2$.　このようにして，

$\underline{1 \le i \le d}$　$n_i \ge n_i' \ge n_i - m_0$.

即ち，我々は次の定理を得た．

Thm. 11　1. $\deg \bar b_\pi = \deg \bar b$

2. $|\deg c_\pi - \deg c| \le m_0 d$

3. $\bar b_\pi$ と $\bar b$ の mod. $\mathbb{Z}$ groups の個数，その代表元達の mod $\mathbb{Z}$ class，各 group の元数はことごとく一致し，

$\bar b$ の $(s+\alpha_j)(s+\alpha_j+i_2)\cdots(s+\alpha_j+i_d)$　$i_k \le i_{k+1}$

$\bar b_\pi$ の $(s+\alpha_j+i_1')(s+\alpha_j+i_2')\cdots(s+\alpha_j+i_d')$　$i_k' \le i_{k+1}'$

が対応する因子とすれば，　$i_k \ge i_k' \ge i_k - m_0$.
$(i_1 = 0)$

一般に，　$(\bar b_{z_1}, c_{z_1}) = (\bar b_{z_2}, c_{z_2})$

$\Rightarrow$　$b_{z_1+z_2} = b_{z_1} = b_{z_2}$　　$c_{z_1+z_2} \mid c_{z_1} = c_{z_2}$

$b'_{z_1\cap z_2} \Subset b'_{z_1} = b'_{z_2}$　　$c_{z_1\cap z_2} \mid$ 〃 .

$(\bar b_\pi, c_\pi) = (\bar b, 1)$ の場合，次の定理がある.

この条件は　$b_\pi(s) = \bar b(s)$　と同値なことに注意せよ.

$\mathfrak{M}'(s) = \{ u(s) \in \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{D}[s] f^{s-\nu} \mid \exists m,\ [\bar b(s)]_m u(s) \in \mathfrak{M}(s+m) \}$ とおく.*

明らかに　$\mathfrak{M}'(s) \supset \mathfrak{M}(s)$.

作り方より，　$\bar b(s)\mathfrak{M}'(s) \subset \mathfrak{M}'(s+1)$

この2つから，　$b_{\mathfrak{M}'} = \bar b_{\mathfrak{M}'} = \bar b$.

*　$\exists l$,　$\mathcal{D}[s] f^{s-l} \supset \mathfrak{M}'(s)$　とおもわれるが，証明はまだない.

$\mathcal{N}(s)$ は従来の仮定を課す.

Thm.12 $b_{\mathcal{N}}(s)=\bar{b}(s) \iff \mathcal{M}'(s)\supset\mathcal{N}(s)\supset\mathcal{M}(s)$.

∵) ⇒ 条件より $\mathcal{N}(s+1)\supset\bar{b}(s)\mathcal{N}(s)\supset\bar{b}(s)\bar{b}(s-1)\mathcal{N}(s-1)\cdots$

i.e. $\mathcal{N}(s)\supset[\bar{b}(s-k)]_k\mathcal{N}(s-k)\supset[\bar{b}(s-k)]_k\mathcal{D}[s]f^{s-k}$.

∴ $\mathcal{N}(s)\supset\mathcal{M}(s)$. これを用いて, $m\geq m_0$

$$\mathcal{N}(s)\xrightarrow{\varphi(s)}\mathcal{M}(s)\supset\mathcal{N}(s+m)\xrightarrow{\varphi(s+m)}\mathcal{M}(s+m)$$
$$\mathcal{N}(s)\xrightarrow{[\bar{b}(s)]_m}\mathcal{N}(s+m),\quad \mathcal{M}(s)\xrightarrow{[\bar{b}(s)]_m}\mathcal{M}(s+m).$$

m 十分大にとって, $\text{min.poly}(\mathcal{N}(s)/\mathcal{M}(s+m) \ni s)\mid[\bar{b}(s)]_m$.

一方 $\mathcal{N}(s)\xrightarrow{[b(s)]_m}\mathcal{N}(s+m)$ の $[b(s)]_m$ は best possible.

よって上の $\mid$ は実は等号.

∴ $\mathcal{M}'(s)\supset\mathcal{N}(s)$

⇐ $\mathcal{D}[s]f^{s-m_0}\supset\mathcal{N}(s)$ として,

$\mathcal{M}''(s)=\mathcal{M}(s-m_0)\cap\mathcal{M}'(s)$ とおく. m 十分大にして

$$\mathcal{M}''(s)\supset\mathcal{N}(s)\supset\mathcal{M}(s)\supset\mathcal{N}(s+m)\supset\mathcal{M}(s+m)$$
$$\mathcal{M}''(s)\xrightarrow{[\bar{b}(s)]_m}\mathcal{M}(s+m),\quad \mathcal{N}(s)\xrightarrow{[\bar{b}_{\mathcal{N}}(s)]_m\,c_{\mathcal{N}}(s+m)}\mathcal{N}(s+m)$$

$\bar{b}_{\mathcal{N}}(s)$ の根は, Thm. に従い $\bar{b}(s)$ のものより 0 か自然数をひいたもの. しかし, 上の図式より, 結局 $c_{\mathcal{N}}=1$

$\bar{b}_{\mathcal{N}}=\bar{b}$ でなければならない. Q.E.D.

§3. Quasi-hom. の場合の $\tilde{b}(s)$

f: weighted hom. isol. sing $\quad (\sum a_i x_i D_i) f = f$

とする. (f: quasi-hom. isol. sing なら Saito の定理よりこうしてよい)

$$\frac{t^{a_1}-t}{1-t^{a_1}} \cdots \frac{t^{a_n}-t}{1-t^{a_n}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}_+} q_\alpha t^\alpha$$ として. (右辺は有限項)

$$b(s) = (s+1) \prod_{q_\alpha \neq 0} (s+\alpha).$$

$$B(s) = (s+1) \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}_+} (s+\alpha)^{q_\alpha}$$ が固有多項式であった.

$$\mathcal{M}_\nu = \mathcal{D}[s] f^s \big/ \mathcal{D}[s] f^{s+\nu} \simeq \mathcal{D} \big/ \mathcal{J}_0 + \mathcal{D} f^\nu$$

$$\mathcal{J}_0 = \{ P(x,D) \mid P(x,D) f^s = 0 \}. \qquad \mathcal{J}_0 = \sum \mathcal{D}(f_i D_j - f_j D_i)$$

となることは, $\nu = 1$ の場合と同様. 又明らかに,

$$0 \to (\mathcal{M}_{\nu'})_{s \mapsto s+\nu} \longrightarrow \mathcal{M}_{\nu+\nu'} \longrightarrow \mathcal{M}_\nu \longrightarrow 0.$$

$\mathcal{M}_\nu$ における s の min. poly. が $b_\nu(s)$ であった. 固有多項式を $B_\nu(s)$ とする. $\quad b_1(s) = b(s)$, $\quad B_1(s) = B(s)$.

$B_\nu(s) = [s+1]_\nu B'_\nu(s)$ という表示をもつ. (上の seq. から明らか) 隣どうしの寄与が $B'_\nu(s)$ になる.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \leftarrow \mathrm{Hom}((\mathcal{M}_\nu)_{s \mapsto \nu+\nu'}, \mathcal{B}_{pt}) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_{\nu+\nu'}, \mathcal{B}_{pt}) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_\nu, \mathcal{B}_{pt}) \leftarrow 0. \\
\circlearrowright & & \circlearrowright & & \circlearrowright \\
B'_\nu(s+\nu) & & B'_{\nu+\nu'}(s) & & B'_\nu(s)
\end{array}$$

$B'_{\nu+\nu'}(s) = B'_{\nu}(s)\, B'_{\nu'}(s+\nu)$ $\quad\therefore\quad$ $B'_{\nu}(s) = [B(s)]_{\nu}$

$\therefore\quad B_{\nu}(s) = [s+1]_{\nu} \prod (s+\alpha)^{q_\alpha + \cdots + q_{\alpha-\nu+1}}$

min. poly としては,

$$b_{\nu}(s) = [s+1]_{\nu} \prod_{\alpha} (s+\alpha)\ ;\ (q_\alpha, \cdots, q_{\alpha-\nu+1}) \neq 0 .$$

従って, $\nu \geq \nu_0$ ととり Cor. により次をうる.

Thm. f: quasi-hom. isolated sing.

$$\bar{b}(s) = (s+1) \prod (s+\alpha_j)$$
$$\bar{b}'(s) = (s+1) \prod (s+\alpha'_j)$$

ここに, $b(s)/(s+1)$ の根の mod. Z group の最小代表元達を $\{\alpha_j\}$, 最大代表元達を $\{\alpha'_j\}$ とする.

$$\because)\quad \bar{b}(s) = \frac{b_{\nu+1}(s)}{b_{\nu}(s+1)}$$
$$= \frac{[s+1]_{\nu+1} \cdot \prod (s+\alpha)\ (q_\alpha, \cdots, q_{\alpha-\nu}) \neq 0}{[s+2]_{\nu}\ \prod (s+\alpha)\ \ (q_{\alpha-1}, \cdots, q_{\alpha-\nu}) \neq 0} .$$
$$= (s+1) \prod (s+\alpha)\quad q_\alpha \neq 0,\ (q_{\alpha-1}, \cdots, q_{\alpha-\nu}) = 0 .$$

$\nu \geq \nu_0$ とすれば, 第二因子の α は, 絶対値最小のもののみが残っていることになる。

example. Elementary Singularities.

$A_k,\ D_k,\ E_6,\ E_7,\ E_8$ $\qquad b = \bar{b} = \bar{b}'$

$\widetilde{E}_6,\ \widetilde{E}_7,\ \widetilde{E}_8$ $\qquad C_1(s) = C(s) = s+1$

(ここで $\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_8$ は 3変数表示にとった. 2変数表示だと $s+\frac{1}{2}$)

example. $f : (\mathbb{C}^n, 0)$ hom. degree r isol. sing.

$$\bar{b}(s) = (s+1)\cdot\left(s+\frac{n}{r}\right)\cdots\left(s+\frac{n+(r-1)}{r}\right)$$

$$\bar{b}'(s) = (s+1)\cdot\left(s+\frac{(n-1)(r-1)}{r}\right)\cdots\left(s+\frac{n(r-1)}{r}\right)$$

$$C(s) = \left(s+\frac{n}{r}\right)\cdots\left(s+\frac{n(r-1)-r}{r}\right)$$